Problème : Détermination de la valeur minimale d'un polynôme de plusieurs variables à coefficients positifs

par SABIR ILYASS

18 décembre 2020

♣♣♠♣♣

N.B. : $*$ Si vous trouvez des erreurs de Francais ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-moi un mail à ilyasssabir7@gmail.com

⋆⋆⋆⋆⋆

l'objectif du problème : on se donne des réels strictement positifs $a_1, a_2, .., a_n$ fixés , et $x_1, ..., x_n > 0$ vérifiant $x_1 + \cdots + x_n = n$,et $m \in \mathbb{N}$, on cherche le minimum de l'expression

$$a_1.x_1^m + \cdots + a_n.x_n^m$$

⋆⋆⋆⋆⋆

Partie 1 :

1-l'inégalité de Hölder : Soient $m, n \in \mathbb{N}^\star$,$(a_{2,1}, ..., a_{2,n})$,$(a_{1,1}, ... , a_{1,n})$, ..., et $(a_{m,1}, ... , a_{m,n})$

Montrer que :

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) \geqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} a_{i,j}}\right)^m$$

2-Etudier le cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder

3-Soient $a_1, ... , a_n > 0$,Montrer que :

$$(1+a_1)(1+a_2)....(1+a_n) \geqslant (1+\sqrt[n]{a_1 a_2 .... a_n})^n$$

4-Soient $k \in \mathbb{N}^\star$,et $a, b, c > 0$,Montrer que :

$$\frac{a^{k+1}}{b^k} + \frac{b^{k+1}}{c^k} + \frac{c^{k+1}}{a^k} \geqslant a + b + c$$

Partie 2 :

comme on a déjà dit ,on va traiter un cas simple ,

Soient $x, y, z > 0$, tel que $x + y + z = 3$

On cherche le minimum de $x^4 + 2y^4 + 3z^4$

Pour cela on considére trois réels $a, b, c > 0$,tel que $a + b + c = 3$

1-Montrer que :

$$x^4 + 2y^4 + 3z^4 \geqslant \frac{(a^3 x + 2b^3 y + 3c^3 z)^4}{(a^4 + 2b^4 + 3c^4)^3} \, (\star)$$

2-On prend $a, b, c > 0$, de telle sorte : $a^3 = 2b^3 = 3c^3 = k^3$ où $k > 0$

réécrire l'inégalité précédente.

3-Etudier le cas d'égalité dans ($\star$),puis justifier que pour atteinde la valeur maximale de $\frac{(a^3x+2b^3y+3c^3z)^4}{(a^4+2b^4+3c^4)^3}$, tout en respectant la question précédante , il faut choisir $a=x, b=y, c=z$.

4-Dans ce cas (de la question 3) ,Montrer que :

$$k=\frac{3}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$$

5-Conclure.

Partie 3 :

C'est la partie la plus importante ,puisqu'il répond à notre objectif .

On prend des réels strictement positifs $a_1, a_2, .., a_n$ fixés , et $x_1, \ \dots, x_n>0$ vérifiant :

$x_1+\cdots+x_n=n$,et $m\in\mathbb{N}$, on cherche le minimum de l'expression

$$a_1.x_1^m+\cdots+a_n.x_n^m$$

On va s'inspérer du cas particulier de la partie 2 :

On prend des réels $y_1, \ ...., y_n>0$

1-Montrer que :

$$a_1.x_1^m+\cdots+a_n.x_n^m \geqslant \frac{(a_1.y_1^{m-1}x_1^m+\cdots+a_ny_n^{m-1}.x_n^m)^m}{(a_1.y_1^m+\cdots+a_n.y_n^m)^{m-1}}$$

2-Poser des conditions sur $y_1, \ ...., y_n$ pour avoir la valeur maximale de l'expression $\frac{(a_1.y_1^{m-1}x_1^m+\cdots+a_ny_n^{m-1}.x_n^m)^m}{(a_1.y_1^m+\cdots+a_n.y_n^m)^{m-1}}$,dans l'inégalité précédente

3-En déduire :

$$\min_{x_1+\cdots+x_n=n}(a_1.x_1^m+\cdots+a_n.x_n^m)=\frac{n^m}{\left(\frac{1}{\sqrt[m-1]{a_1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[m-1]{a_n}}\right)^{m-1}}$$

SOLUTION :

Partie 1 :

1-l'inégalité de Hölder : Soient $m, n\in\mathbb{N}^\star$,$(a_{2,1}, \ ...., a_{2,n})$,$(a_{1,1}, \ ...., a_{1,n})$, ..., et $(a_{m,1}, \ ...., a_{m,n})$

Montrons que :

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\right)\geqslant\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m}a_{i,j}}\right)^m$$

On sais que la fonction ln est concave sur $]0,+\infty[$

Donc on a par application de l'inégalité de Jensen on a pour tout $p_1, .., p_m>0$ tel que $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}=1$, et pour tout $x_1, \ \dots, x_m>0$:

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i^{p_i}}{p_i}\right)\geqslant\sum_{i=1}^{m}\ln(x_i)$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i^{p_i}}{p_i}\geqslant\prod_{i=1}^{m}x_i\,(\text{AM}-\text{GM } g\acute{e}n\text{éralisé})$$

En particulier :pour tout j∈⟦1,n⟧ $x_i=\frac{a_{i,j}}{\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\right)}$, et $p_i=m$,$\forall i\in[\![1,m]\!]$

Donc pour tout $j\in[\![1,n]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{i,j}}{m\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\right)}\geqslant\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{a_{i,j}}{\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\right)}\right)^{\frac{1}{m}}=\frac{\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m}a_{i,j}}}{\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\right)^{\frac{1}{m}}}$$

Parsuite :

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{i,j}}{m\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\right)}\geqslant\sum_{j=1}^{n}\frac{\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m}a_{i,j}}}{\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\right)^{\frac{1}{m}}}$$

Avec :

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{i,j}}{m\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\right)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{i,j}}{\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{m}=1$$

Ainsi :

$$1\geqslant\sum_{j=1}^{n}\frac{\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m}a_{i,j}}}{\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\right)^{\frac{1}{m}}}$$

Donc :

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\right)^{\frac{1}{m}}\geqslant\sum_{j=1}^{n}\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m}a_{i,j}}$$

D'où :

$$\boxed{\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\right)\geqslant\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m}a_{i,j}}\right)^{m}}$$

2-Etudions le cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder

On a l'égalité dans l'inégalité de Hölder si :

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{i,j}}{m\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\right)}=\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{a_{i,j}}{\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\right)}\right)^{\frac{1}{m}};\forall j\in[\![1,n]\!]$$

Donc :

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{i,j}}{m\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_{i,k}\right)}\right)=\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{a_{i,j}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_{i,k}\right)}\right)$$

Avec la fonction ln est strictement concave , alors on a : $\frac{a_{i,j}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_{i,k}\right)}$ est indépendant de i

Donc

$$\boxed{\exists C_j^{\text{te}}>0,\forall i,l\in[\![1,m]\!]\ \frac{a_{i,j}}{a_{l,j}}=C_j^{\text{te}}}$$

3-Soient $a_1,\ ....,a_n>0$,Montrons que :

$$(1+a_1)(1+a_2)....(1+a_n)\geqslant(1+\sqrt[n]{a_1a_2....\,a_n})^n$$

Méthode 1 :Par application directe de l'inégalité de Hölder on a le résultat !

Méthode 2 : Par applicztion de l'inégalité arithmético-géomérique , on a :

$$\frac{1}{1+a_1}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\geqslant\frac{n}{\sqrt[n]{(1+a_1)....\,(1+a_n)}}$$

Et

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\cdots+\frac{a_n}{1+a_n}\geqslant\frac{n\sqrt[n]{a_1....\,a_n}}{\sqrt[n]{(1+a_1)....\,(1+a_n)}}$$

Par sommation terme à terme on a :

$$n\geqslant\frac{n(1+\sqrt[n]{a_1....\,a_n})}{\sqrt[n]{(1+a_1)....\,(1+a_n)}}$$

Ainsi :

$$\boxed{(1+a_1)(1+a_2)....\,(1+a_n)\geqslant(1+\sqrt[n]{a_1a_2....\,a_n})^n}$$

4-Soient $a,b,c>0$,Montrons que pour tout $k\in\mathbb{N}^\star$:

$$\frac{a^{k+1}}{b^k}+\frac{b^{k+1}}{c^k}+\frac{c^{k+1}}{a^k}\geqslant a+b+c$$

Appliquons l'inégalité de Hölder ,on a :

$$(a+b+c)^k\left(\frac{a^{k+1}}{b^k}+\frac{b^{k+1}}{c^k}+\frac{c^{k+1}}{a^k}\right)\geqslant(a+b+c)^{k+1}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{a^{k+1}}{b^k}+\frac{b^{k+1}}{c^k}+\frac{c^{k+1}}{a^k}\geqslant a+b+c}$$

Autre méthode :

par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^\star$ (le résultat reste vrai pour $k=0$)

♣ pour $k=0$ on a bien $a+b+c \geqslant a+b+c$

♣ pour $k=1$ on a $\left(\frac{a^2}{b}+b\right)+\left(\frac{b^2}{c}+c\right)+\left(\frac{c^2}{a}+a\right) \geqslant 2a+2b+2c$, donc $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqslant a+b+c$

♣Soit $k \in \mathbb{N}^\star$,supposons que pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$ $\frac{a^{j+1}}{b^j}+\frac{b^{j+1}}{c^j}+\frac{c^{j+1}}{a^j} \geqslant a+b+c$

et montrons que $\frac{a^{k+1}}{b^k}+\frac{b^{k+1}}{c^k}+\frac{c^{k+1}}{a^k} \geqslant a+b+c$

$\rightarrow$ si k est pair , alors $\exists j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $k=2j_0$

On a alors

$$\frac{a^{k+1}}{b^k}+a=\frac{a^{2j_0+1}}{b^{2j_0}}+a \geqslant 2\frac{a^{j_0+1}}{b^{j_0}}$$

De même on trouve

$$\frac{b^{k+1}}{c^k}+b=\frac{b^{2j_0+1}}{c^{2j_0}}+b \geqslant 2\frac{b^{j_0+1}}{c^{j_0}} \quad \text{et} \quad \frac{c^{k+1}}{a^k}+c=\frac{c^{2j_0+1}}{a^{2j_0}}+c \geqslant 2\frac{c^{j_0+1}}{a^{j_0}}$$

Donc

$$\frac{a^{k+1}}{b^k}+\frac{b^{k+1}}{c^k}+\frac{c^{k+1}}{a^k}+a+b+c \geqslant 2\left(\frac{a^{j_0+1}}{b^{j_0}}+\frac{b^{j_0+1}}{c^{j_0}}+\frac{c^{j_0+1}}{a^{j_0}}\right)$$

Or $j_0 \in [\![0, k-1]\!]$,donc par hypothèse de récurrence on a $\frac{a^{j_0+1}}{b^{j_0}}+\frac{b^{j_0+1}}{c^{j_0}}+\frac{c^{j_0+1}}{a^{j_0}} \geqslant a+b+c$

D'où

$$\frac{a^{k+1}}{b^k}+\frac{b^{k+1}}{c^k}+\frac{c^{k+1}}{a^k} \geqslant a+b+c$$

$\rightarrow$ si k est impair , alors $\exists l_0 \in \mathbb{N}$ tel que $k=2l_0+1$

On a alors

$$\frac{a^{k+1}}{b^k}+b=\frac{a^{2l_0+2}}{b^{2l_0+1}}+b \geqslant 2\frac{a^{j_0+1}}{b^{j_0}}$$

De même on trouve

$$\frac{b^{k+1}}{c^k}+c=\frac{b^{2l_0+2}}{c^{2l_0+1}}+c \geqslant 2\frac{b^{j_0+1}}{c^{j_0}} \quad \text{et} \quad \frac{c^{k+1}}{a^k}+a=\frac{c^{2l_0+2}}{a^{2l_0+1}}+a \geqslant 2\frac{c^{j_0+1}}{a^{j_0}}$$

Donc

$$\frac{a^{k+1}}{b^k}+\frac{b^{k+1}}{c^k}+\frac{c^{k+1}}{a^k}+a+b+c \geqslant 2\left(\frac{a^{j_0+1}}{b^{j_0}}+\frac{b^{j_0+1}}{c^{j_0}}+\frac{c^{j_0+1}}{a^{j_0}}\right)$$

Or $j_0 \in [\![0, k-1]\!]$,donc par hypothèse de récurrence on a $\frac{a^{j_0+1}}{b^{j_0}}+\frac{b^{j_0+1}}{c^{j_0}}+\frac{c^{j_0+1}}{a^{j_0}} \geqslant a+b+c$

D'où

$$\boxed{\frac{a^{k+1}}{b^k}+\frac{b^{k+1}}{c^k}+\frac{c^{k+1}}{a^k} \geqslant a+b+c}$$

Partie 2 :

1-Montrons que :

$$x^4+2y^4+3z^4 \geqslant \frac{(a^3x+2b^3y+3c^3z)^4}{(a^4+2b^4+3c^4)^3}$$

On a d'apeès l'inégalité de Hölder :

$$(x^4+2y^4+3z^4)(a^4+2b^4+3c^4)^3 \geqslant \left(\sqrt[4]{a^{12}x^4}+\sqrt[4]{2^4b^{12}y^4}+\sqrt[4]{3^4c^{12}z^4}\right)^4 = (a^3x+2b^3y+3c^3z)^4$$

D'où

$$\boxed{x^4+2y^4+3z^4 \geqslant \frac{(a^3x+2b^3y+3c^3z)^4}{(a^4+2b^4+3c^4)^3} \ (\star)}$$

2-Si on prend $a,b,c>0$, de telle sorte : $a^3=2b^3=3c^3=k^3$ où $k>0$, on aurra :

$$x^4+2y^4+3z^4 \geqslant k^{12}\frac{(x+y+z)^4}{(a.k^3+b.k^3+c.k^3)^3} = \frac{3^4.k^{12}}{3^3k^9} = 3.k^3$$

3- On a égalité dans $(\star)$, si : $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$,avec $a+b+c=x+y+z>0$,on a l'égalité dans $(\star)$ si

$$\boxed{x=a,\, y=b \text{ et } z=c}$$

.

4-Dans ce cas (de la question 3) ,Montrons que :

$$k=\frac{3}{1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$$

On a :

$$a^3=2b^3=3c^3=k^3$$

Donc :

$$a=k \text{ et } b=\frac{k}{\sqrt[3]{2}} \text{ et } c=\frac{k}{\sqrt[3]{3}}$$

Ainsi :

$$3=a+b+c=k\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$$

D'où :

$$\boxed{k=\frac{3}{1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}}$$

5-On a d'après la question 2 et 5 :

$$x^4+2y^4+3z^4 \geqslant 3.k^3 = \frac{3^4}{\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^3}$$

En utilisant la question on a l'égalité si : $x=k=\frac{3}{1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$, $y=\frac{k}{\sqrt[3]{2}}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)}$

et $z=\frac{k}{\sqrt[3]{3}}=\frac{3}{\sqrt[3]{3}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)}$

D'où

$$\boxed{\min_{x+y+z=3}(x^4+2y^4+3z^4)=\frac{3^4}{\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^3}}$$

Partie 3 :

1-Montrons que :

$$a_1.x_1^m+\cdots+a_n.x_n^m \geqslant \frac{(a_1.y_1^{m-1}x_1+\cdots+a_ny_n^{m-1}.x_n)^m}{(a_1.y_1^m+\cdots+a_n.y_n^m)^{m-1}}$$

On a d'après l'inégalité de Hölder :

$$(a_1.x_1^m+\cdots+a_n.x_n^m)(a_1.y_1^m+\cdots+a_n.y_n^m)^{m-1} \geqslant (a_1.y_1^{m-1}x_1+\cdots+a_ny_n^{m-1}.x_n)^m$$

D'où le résultat :

$$\boxed{a_1.x_1^m+\cdots+a_n.x_n^m \geqslant \frac{(a_1.y_1^{m-1}x_1+\cdots+a_ny_n^{m-1}.x_n)^m}{(a_1.y_1^m+\cdots+a_n.y_n^m)^{m-1}}}$$

2-Posons des conditions sur y_1, ..., y_n pour avoir la valeur maximale de l'expression $\frac{(a_1.y_1^{m-1}x_1^m+\cdots+a_ny_n^{m-1}.x_n^m)^m}{(a_1.y_1^m+\cdots+a_n.y_n^m)^{m-1}}$,dans l'inégalité précédente

On prend comme dans la partie 2 : $y_1+y_2+\cdots+y_n=n$

Et $a_1y_1^{m-1}=\cdots=a_ny_n^{m-1}=k^{m-1}$,où $k>0$ une constante indépandante de i

on a alors :

$$y_1=\frac{k}{\sqrt[m-1]{a_1}},\ldots,y_n=\frac{k}{\sqrt[m-1]{a_n}}$$

Donc :

$$k\left(\frac{1}{\sqrt[m-1]{a_1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[m-1]{a_n}}\right)=y_1+\cdots+y_n=n$$

Ainsi :

$$k=\frac{n}{\frac{1}{\sqrt[m-1]{a_1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[m-1]{a_n}}}$$

Or , on a :

$$a_1.x_1^m+\cdots+a_n.x_n^m \geqslant \frac{(a_1.y_1^{m-1}x_1+\cdots+a_ny_n^{m-1}.x_n)^m}{(a_1.y_1^m+\cdots+a_n.y_n^m)^{m-1}}=\frac{k^{m(m-1)}(x_1+\cdots+x_n)^m}{k^{(m-1)(m-1)}(y_1+\cdots+y_n)^{m-1}}=k^{m-1}.n$$

Donc :

$$\boxed{a_1.x_1^m+\cdots+a_n.x_n^m \geqslant n.\left(\frac{n}{\frac{1}{\sqrt[m-1]{a_1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[m-1]{a_n}}}\right)^{m-1}=\frac{n^m}{\left(\frac{1}{\sqrt[m-1]{a_1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[m-1]{a_n}}\right)^{m-1}}}$$

3-En déduire :

On a égalité dans l'inégalité de la question 1 , si $\frac{x_1}{y_1} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$, avec $x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n$

Donc on a l'égalité si : $x_1 = y_1$ et .... et $x_n = y_n$

On a finalement d'après ce qui précéde :

$$a_1.x_1^m + \cdots + a_n.x_n^m \geqslant \frac{n^m}{\left(\frac{1}{\sqrt[m-1]{a_1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[m-1]{a_n}}\right)^{m-1}}$$

Avec égalité si :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \; x_i = \frac{k}{\sqrt[m-1]{a_i}} = \frac{n}{\sqrt[m-1]{a_i}\left(\frac{1}{\sqrt[m-1]{a_1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[m-1]{a_n}}\right)}$$

Donc :

$$\boxed{\min_{x_1 + \cdots + x_n = n} (a_1.x_1^m + \cdots + a_n.x_n^m) = \frac{n^m}{\left(\frac{1}{\sqrt[m-1]{a_1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[m-1]{a_n}}\right)^{m-1}}}$$